Laudatio zur Verleihung der Carl-Friedrich-Gauß-Medaille 1996 an Prof. Dr. rer. nat. Gerhard Frey

Tietz, Horst

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1996 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.201-205

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

HORST TIETZ, Hannover

Laudatio zur Verleihung der Carl-Friedrich-Gauß-Medaille 1996 an Prof. Dr. rer. nat. Gerhard Frey

Meine sehr verehrten Damen und Herren!

Um Ihnen über die Forschungen unseres Gauß-Medaillisten zu berichten, die heute – zurückdatiert auf den 30. April, den 219. Geburtstag von Carl-Friedrich Gauß – von der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gewürdigt werden, möchte ich weit ausholen. Das hat einen doppelten Zweck:
zum einen haben wegen der Vielschichtigkeit der hier vertretenen Interessen manche der Anwesenden mit Mathematik nicht viel im Sinn, ja sie bringen ihr vielleicht eine solche Hochachtung entgegen, daß sie sich am liebsten in sicherer Distanz zu ihr halten; jedenfalls sollten wir, da wir heute einen Mathematiker ehren, als Dank für das durch Ihrer aller Besuch bekundete freundliche Interesse an unserer Feierlichen Jahresversammlung den Vorhang, der das Heiligtum verhüllt, ein wenig lüften; denn das Werk von Herrn Frey fordert geradezu auf, den wissenschaftsgeschichtlichen und wissenschaftstheoretischen Hintergrund sichtbar zu machen, auf dem es wächst und von dem aus es den Aufstieg auf unbezwingbar scheinende Gipfel gewiesen hat und gleichzeitig Wege erkennen läßt für den Zugriff auf neue Gebiete;
zum anderen möchten wir die Gelegenheit nutzen und Reklame für die Mathematik machen: wir wollen das einzigartige Spannungsfeld skizzieren, das sie als *reine Geistes-* und *als omnipotente Anwendungswissenschaft* auszeichnet! Vielleicht gelingt es, bei dem Einen oder Anderen hier im Saal das geheime „republikanische“ Motiv für die Distanz zur Königin der Wissenschaften, nämlich ihr die Guillotine an den Hals zu wünschen, umzupolen in Goethes mehr ästhetische Distanz: *„Die Sterne, die begehrt man nicht, man freut sich ihrer Pracht!“*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

antwortete unser Kultusminister kürzlich bei einem Interview auf die Frage, ob er denn noch den Satz des Pythagoras wisse. In dieser scherzhaften Form ist das bestenfalls eine sinnlose Merkregel; einen Sinn bekommt die Formel, eine quadratische Gleichung in 3 Unbekannten, erst durch den geometrischen Satz, daß ein Tripel (a,b,c) reeller Zahlen dann und nur dann die Gleichung löst, wenn a,b,c die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Hier fließen Geometrie und Algebra auf schönste Weise zusammen. Eine solche Zusammenschau zweier Disziplinen ist fruchtbar oder aber auch hinderlich, je nachdem wie geschickt sie verwendet wird. Faßt man nämlich zu obiger Gleichung Algebra und Geometrie als untrennbar auf, so hat man eben diesen berühmten Satz, aber der Weg ist hier zuende. Fragt man jedoch nach solchen speziellen Lösungen der Gleichung, die *natürliche*, d.h. positive ganze Zahlen sind, so tritt die geometrische Deutung in den Hintergrund, und man hat eine echtes Problem der **Zahlentheorie:** *Bestimmung* *aller pythagoräischen Tripel natürlicher Zahlen.* Dies Problem wurde von den alten Griechen gestellt und gelöst: *es gibt unendlich viele wesentlich verschiedene solche Tripel, die man explizit angeben kann;* am bekanntesten ist (3,4,5), weniger bekannt (5,12,13).

In seiner *Arithmetica* hat sich (um + 270) **Diophant** von Alexandria allgemeiner mit Gleichungen befaßt, die mit natürlichen Zahlen gelöst werden sollen; er gibt insbesondere an, daß man für die Gleichung vierten Grades

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2$$

unendlich viele Lösungen erhält, wenn man von einem pythagoräischen Tripel (a,b,c) ausgeht und $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ und $u = c^4 - a^2b^2$ setzt; beispielsweise führen die vorher angegebenen pythagoräischen Tripel auf die beiden Lösungen

$$x = 12, y = 20, z = 15, u = 481 \text{ bzw. } x = 60, y = 156, z = 65, u = 24961.$$

Seither nennt man Gleichungen, die in natürlichen Zahlen gelöst werden sollen, *diophantisch.*

Der französische Jurist und geniale Mathematik-Amateur **Pierre de Fermat** (1601–1665) stellte bei der Lektüre von Diophants Arithmetica die Frage: *„Weshalb suchte Diophant (statt 3) nicht 2 vierte Potenzen, deren Summe ein Quadrat ist? – Dies Problem ist tatsächlich unlösbar!"* Hieraus folgert Fermat sofort, daß es auch für die diophantische Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4 (= (z^2)^2)$$

keine Lösung geben kann!

Damit war die Jagd auf alle höheren Potenzen eröffnet: Fermat selbst stellte die berühmte Vermutung auf, daß ***für beliebige Exponenten n > 2 die diophantische Gleichung***

$$x^n + y^n = z^n$$

keine Lösungen besitzt, und er behauptete sogar, „eine wahrhaft wunderbare Beweisführung entdeckt" zu haben!

Diesen oder einen anderen Beweis zu finden, haben sich seitdem in 350 Jahren die mutigsten Amateure und klügsten Methematiker bemüht. Für viele Exponenten gelangen spezielle Beweise (Gauß für $n = 3$ und $n = 5$); jedes n erforderte aber dabei eine eigene Methode, ja es schien denkbar zu sein, daß es keinen für alle n simultan gültigen Beweis gebe, auch wenn für jedes einzelne n ein spezieller Beweis gefunden werden könne –, analog wie die Aussage, daß alle Menschen sterblich sind, nur durch Bestätigung in jedem einzelnen Fall verifizierbar ist –, diese Möglichkeit also, daß der „Große Fermat" richtig, aber nicht beweisbar sei, war für die theoretische Logik eine ungeheure Herausforderung – und ein wesentliches Motiv für den sog. *Intuitionismus.*

Aber **David Hilbert** brachte das Gesamtproblem wieder in den Blick, indem er im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris unter den 23 Problemen, die seinen Fachkollegen als Wegweiser in das 20. Jahrhundert dienen sollten, im 10. Problem die Aufgabe stellte:

„gegeben eine diophantische Gleichung mit beliebig vielen Unbekannten und mit ganzzahligen Koeffizienten: man entwickle eine Methode, die gestattet, in endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob die Gleichung in natürlichen Zahlen lösbar ist!"

Soviel hatte Gauß wohl nicht gefordert, als er am 21. März 1816 seinem Freund Olbers schrieb:

„Ich gestehe zwar, daß das Fermatsche Theorem als isolierter Satz für mich wenig Interesse hat. ... Allein ich bin überzeugt, wenn das Glück mehr tun sollte, als ich erwarten darf, und mir einige Hauptschritte (in einer großen Erweiterung der höheren Arithmetik) glücken, auch der Fermatsche Satz als ein der am wenigsten interessanten Corollarien dabei erscheinen wird."

Doch Hilberts 10tes Problem erwies sich als zu unbescheiden! Logiker bewiesen im Jahre 1982: *„kein Algorithmus kann entscheiden, ob eine beliebige diophantische Gleichung in 9 oder mehr Unbekannten lösbar ist!"*

Die magische Grenze zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit verläuft also zwischen 4 und 8 Variablen! – Doch Fermat, und wohl auch Gauß, bleiben mit 3 Unbekannten diesseits dieser Grenze, und die Hoffnung aller Fermatisten, für die der reiche Mathematiker Wolfskehl 1906 einen Preis von 100.000 Goldmark ausgesetzt hatte, blieb noch ungetrübt: das Fermatsche Problem ist, wie Dorian Goldfeld schreibt *„knusprig, sauber, leicht zu formulieren, scheinbar nutzlos und wahnsinnig schwer zu lösen!"*

Fruchtbar ist wieder die geometrische Sicht. Schreibt man nämlich die pythagoräische Gleichung um, indem man $x = a/c$, $y = b/c$ setzt, so erhält man

$$x^2 + y^2 = 1,$$

die Gleichung eines Kreises, und aus den pythagoräischen Tripeln werden seine *rationalen Punkte,* d.h. solche Punkte, deren Koordinaten Brüche aus ganzen Zahlen sind.

Dieser Ansatz übersetzt analog das Fermatproblem in die *Frage* nach *allen rationalen Punkten, die auf der* ***algebraischen Kurve***

$$x^n + y^n = 1$$

liegen, und seine Behauptung besagt, daß *es* ***nur für n = 2*** *solche Punkte geben kann!*

Den Sprung von *unendlich vielen* Punkten für $n = 2$ zu *keinem* Punkt für $n > 2$ schwächte der englische Mathematiker **Mordell** ab, indem er die Vermutung aufstellte, daß es für jedes *n > 2 nur endlich viele* solcher Punkte gebe. Es war eine Sensation, als **Faltings** vor 13 Jahren der Beweis dieser Vermutung gelang. Aber für den Sprung von *„endlich viele"* zu *„kein"* kam man nicht weiter, bis ...,

ja bis vor 10 Jahren Gerhard Frey einen ganz anderen Zusammenhang mit der algebraischen Geometrie herstellte, der einen neuen Weg auf den Fermatberg eröffnete! – Dieser Weg ist nun geschafft, und es liegt eine neue große Theorie vor, in der sich Algebra, Zahlentheorie und Geometrie zu einem so komplizierten Gebäude verbinden, daß Sie selbst, lieber Herr Frey, meinen: sie *„macht eine tiefe strukturelle Aussage über* *elliptische Kurven, die tatsächlich eine neue Landschaft in der Mathematik eröffnet, deren Bedeutung aber einem Nichtfachmann sehr viel schwerer zu erklären ist".* Daher möchte ich, selbst „Nichtfachmann" in engerem Sinn, gar nicht erst den Versuch wagen, in diese Tiefe einzutauchen. Ich vermute aber, daß Ihr Festvortrag uns in diese „neue Landschaft" führen und uns zeigen wird, welche Anwendungen diese Theorie leistet.

Ich kann hier nur soviel erwähnen, daß es eben ***elliptische Kurven*** sind, zu denen Frey gewisse diophantische Gleichungen, darunter die Fermatschen, in Beziehung gesetzt hat, und damit die Kraft einer seit Gauß hochaktuellen und mächtigen Theorie, in der sich Analysis, Algebra und Arithmetik immer wieder gegenseitig befruchten, erschloß und gleichzeitig ein neues Forschungsfeld eröffnete. **Andrew Wiles** schreibt, daß dieses große Programm durchgeführt werden konnte, *stimulated by an ingenious idea of Frey!*

Elliptische Kurven werden durch Gleichungen der Form

$y^2 = P(x)$, wobei P ein Polynom vom Grad 3 oder 4 ist,

beschrieben. Frey verbindet nun mit der Fermat-Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

die elliptische Kurve

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n);$$

diese, seither in der Literatur als ***Frey-Kurven*** bezeichneten Gebilde, haben aber, *falls a,b,c natürliche Zahlen sind, „so exzellente Eigenschaften"*, daß sie *in sich widersprüchlich* sind: mit anderen Worten: falls Fermat mit seiner Vermutung im Unrecht ist, existiert die zugehörige Frey-Kurve nicht! Dieser Widerspruch löst sich nur dadurch auf, daß die angenommene Beziehung zwischen a,b und c nicht bestehen kann; das beweist den Fermatschen Satz!

Unser Laureat schreibt selbst:

Die Reaktionen der mathematischen Welt … waren natürlich sehr heftig. Während ein Kollege von der „Beseitigung eines öffentlichen Ärgernisses" sprach, sagte mir ein anderer, daß er das Gefühl habe, daß ein alter Freund gestorben sei.

Diese Bandbreite der Emotionen hat sicher mit der Einschätzung der Bedeutung von Fermats Vermutung in der Mathematik zu tun. Als Ergebnis ist der Fermatsche Satz nicht übertrieben interessant; ich kenne keine einzige ernsthafte Folgerung, die man aus ihm ziehen kann. Als Herausforderung hat die Vermutung aber außerordentlich stimulierend gewirkt. Selbst falsche „Beweise" haben oft zu tiefen Einsichten in neue Gebiete der Mathematik geführt, und oft hat Fermats Vermutung als sehr gutes Testobjekt für die Kraft neuer Theorien gedient. – Außerdem sollte man einen anderen Effekt nicht unterschätzen: Viele Menschen, die sich zur Mathematik hingezogen fühlen, waren von Fermats Vermutung fasziniert. … Es ist auch heute noch möglich (wenn auch nicht sehr wahrscheinlich), daß ein „einfacher" Beweis für Fermats Vermutung, die jetzt ein Satz ist, gefunden werden kann.

Nun noch einige Worte über die **Persönlichkeit von Gerhard Frey:** Sie wurden 1944 im schönen Odenwald geboren und haben Ihre wissenschaftliche Ausbildung in Tübingen und Heidelberg erhalten, im Schlepptau Ihres Lehrers **Roquette,** bis zur Habilitation 1973; danach folgten Sie für zwei Jahre Ihrem Heidelberger Freund **Geyer** nach Erlangen – beide Herren, die heute Vormittag ganz wesentlich unsere Vortragsveranstaltung getragen haben, dürfen wir hier herzlich begrüßen – für diese berühmte Schule, die Sie, lieber Herr Roquette, aufgebaut haben, beglückwünsche ich Sie ganz besonders, steht doch hinter Ihnen Allen auch der große Name meines Freundes **Zassenhaus,** dessen Schüler werden zu können, mir nicht vergönnt war. – Dann war Herr Frey 15 Jahre lang in Saarbrücken, wo man ihn, wie er schreibt, *bei sehr guten Bedingungen und in anregender Atmosphäre in Ruhe arbeiten ließ.* Seit 1990 sind Sie nun in Essen, und die Universitäten, durch die Sie Ihr Weg führte, waren auch die bevorzugten Ziele, die Hans Zassenhaus so oft nach Deutschland zogen, und ich vermute, daß es diese Verbindung zu ihm gewesen ist, die Sie veranlaßt hat, Ihr Essener Institut der **Experimentellen Mathematik** zu verschreiben, deren frühester und steter Promotor Zassenhaus gewesen ist! Viele Ihrer zahlreichen Auslandsaufenthalte stehen mit Zassenhaus in Zusammenhang.

Sie bezeichnen sich selbst als glücklichen Menschen, weil Sie in eine „goldene" Zeit hineingewachsen sind, in der sich Ihnen klare Ziele boten und Sie nie zu anderen Wegen gezwungen waren. Das Glück, das Sie so dankbar empfinden, möge Ihnen und Ihrer Familie gewogen bleiben. Das ist unser aller Glückwunsch zu Ihrem Geburtstag, den Sie vor zwei Wochen gefeiert haben, und vielleicht werten Sie die Gauß-Medaille, die Ihnen der Herr Präsident nach dem folgenden Adagio überreichen wird, nicht nur als wohlverdient, sondern auch als eine weitere Manifestation des Glückes auf Ihrem Lebensweg!

Prof. em. Dr. phil. H. Tietz
Röddinger Straße 31 · 30823 Garbsen